Chapitre 2

Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

2.1 Étude en dimension 2

2.1.1 Description du groupe spécial $SO(2)$

Soit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2).$$

On a $\det \Omega = ad - bc = 1$. Par suite :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \Omega^{-1} = {}^t\Omega = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ , \ a^2 + b^2 = 1.$$

On sait alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, défini à 2π près, tel que :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega(\theta).$$

On a donc obtenu :

Théorème 2.1.1. *Le groupe $SO(2)$ est commutatif, et $SO(2) = \{\Omega(\theta) \,;\, \theta \in \mathbb{R}\}$.*

Remarque. Le fait que $SO(2)$ soit commutatif est fondamental, tant d'un point de vue mathématique que physique.

♦ **Exercice 23.** Vérifier la première assertion du théorème.

2.1.2 Orientation

Les matrices $\Omega(\theta)$ sont appelées des *matrices de rotations*. Rappelons que les éléments de $SO(E)$, pour E un espace euclidien, sont appelés des rotations vectorielles. Justifions comme promis ici cette appellation. Considérons l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ sa base canonique, i.e.,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u \in SO(E)$. Alors $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in SO(2)$; c'est donc une matrice de rotation et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega(\theta).$$

♦ **Exercice 24.** Représenter sur une figure les vecteurs $e_1, e_2, u(e_1), u(e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Compte tenu de la figure obtenue à l'exercice précédent, on aimerait dire que u est *la* rotation d'angle θ (et de centre $0_{\mathbb{R}_2}$) où θ est défini à 2π près. Malheureusement, pour que cette définition ait un sens, il faudrait que l'angle (même défini à 2π près) de la rotation u ne dépende pas de la base orthonormée choisie.

Or ce n'est pas le cas ! En effet, on vérifie par exemple que

$$\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}') = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega(-\theta),$$

où $\mathcal{E}'$ est la base orthonormée $(-e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ (toujours muni de son produit scalaire canonique).

Cette petite discussion justifie la notion d'*orientation* que nous allons introduire maintenant (de façon plus rigoureuse que celle vue dans les classes antérieures).

Supposons $\dim E = 2$, et soit $u \in SO(E)$. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ des bases orthonormées de E, et Ω la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$. Rappelons qu'on a alors $\Omega \in O(2)$ (cf. Corollaire 1.6.3). D'autre part, comme $u \in SO(E)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) = \Omega(\theta)$. Alors, $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{F}) = \Omega^{-1}\Omega(\theta)\Omega$. Il y a alors deux cas possibles :

- $\Omega \in SO(2)$, et alors $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{F}) = \Omega(\theta) = \mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$.
- $\Omega \in O^-(2)$, et alors $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{F}) = \Omega(-\theta)$.

♦ **Exercice 25.** Justifier ces assertions.

Définition 2.1.1. *On dit que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ définissent la* **même orientation** *de E si $\Omega \in SO(E)$. Par définition,* **orienter** *E, c'est fixer une base orthonormée de E.*
Les bases orthonormées **directes** *$\mathcal{F}$ sont alors celles pour lesquelles $\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = 1$ Les bases orthonormées* **indirectes** *ou* **rétrograde** *$\mathcal{F}$ sont alors celles pour lesquelles $\det P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = -1$.*

Définition-Proposition 2.1.2. *Supposons toujours $\dim E = 2$, et soit $u \in SO(E)$. L'espace E étant orienté, d'après ce qui précède, il existe un réel θ, uniquement déterminé modulo 2π, tel que l'on ait $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) = \Omega(\theta)$ pour <u>toute</u> base orthonormée <u>directe</u> de E. On dit que θ est* **une mesure** *de la rotation u.*

Remarque. On dit « une » mesure d'angle de la rotation u , et non « la » mesure d'angle de la rotation u car celle-ci n'est définie qu'à 2π près. Mais les expressions « l'angle de la rotation u » ou « la mesure d'angle de la rotation u » sont tolérées ; il faut alors garder à l'esprit que la mesure d'angle n'est définie qu'à 2π près.
⚠ **Attention** : en revanche, parler d'une mesure d'angle d'une rotation u d'un espace vectoriel euclidien E n'a de sens que si E est orienté. Sur ce point, il n'y a aucune tolérance !

2.1.3 Description de l'ensemble $O^-(2)$

Soit :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O^-(2).$$

On a $\det \Lambda = ad - bc = -1$. Par suite :

$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} = {}^t\Lambda = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \ , \ a^2 + b^2 = 1.$$

On voit comme précédemment qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, défini à 2π près, tel que :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \Lambda(\theta).$$

D'autre part, posant :

$$X_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \ , \ Y_\theta = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

il vient :

$$\Lambda(\theta)X_\theta = X_\theta \ , \ \Lambda(\theta)Y_\theta = -Y_\theta.$$

On a donc obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.3. *On a $O^-(2) = \{\Lambda(\theta);\ \theta \in \mathbb{R}\}$, et tout élément de $O^-(2)$ est une matrice de réflexion.*

♦ **Exercice 26.** Justifier ce théorème et faire une figure (on représentera en particulier l'axe de la réflexion).

2.2 Étude en dimension 3

2.2.1 Produit mixte, produit vectoriel

Dans ce paragraphe, E est pour le moment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$. Pour toutes bases orthonormées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de E, on a $P_\mathcal{E}^\mathcal{F} \in O(n)$ (cf. corollaire 1.6.3). Il y a donc deux cas possibles :

- ou bien $\det P_\mathcal{E}^\mathcal{F} = 1$;
- ou bien $\det P_\mathcal{E}^\mathcal{F} = -1$.

Ceci motive la définition suivante qui généralise la notion d'orientation vue dans le cas $n = 2$:

Définition 2.2.1. *Par définition,* **oritenter** *E, c'est choisir une base orthonormée de E. On dit aussi dans ce cas qu'on a choisi une* **orientation** *de E.*

Fixons une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E, d'où une orientation de E. Soit $\mathcal{F}$ une base orthonormée de E. On dit que $\mathcal{F}$ est base orthonormée **directe** *si $\det P_\mathcal{E}^\mathcal{F} = 1$; on dit que $\mathcal{F}$ est base orthonormée* **indirecte** *ou* **rétrograde** *si $\det P_\mathcal{E}^\mathcal{F} = -1$.*

Désormais, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Définition-Proposition 2.2.2. *Soit $\mathcal{U} = (u, v, w)$ une famille de trois vecteurs de E. Le réel $\det_{\mathcal{E}} \mathcal{U}$ est indépendant de la base orthonormée directe de E. On dit que c'est le* **produit mixte** *de $\mathcal{U}$, et on le note $[u, v, w]$.*

♦ **Exercice 27.** Démontrer cette proposition

♦ **Exercice 28.** Démontrer les propriétés suivantes :
(i) $[u, v, w] = -[v, u, w] = -[u, w, v] = -[w, v, u]$;
(ii) pour tous $v, w \in E$, l'application $E \to \mathbb{R}$, $u \to [u, v, w]$ est linéaire.
(iii) on a $[u, v, w] = 0$ si et seulement si la famille (u, v, w) est liée.
(iv) si (u, v, w) est une base orthonormée directe (resp. indirecte) de E, alors $[u, v, w] = 1$ (resp. $[u, v, w] = -1$).

Théorème-Définition 2.2.1. *Soient $u, v \in E$. Il existe un et un seul vecteur $w \in E$ tel que*

$$[u, v, x] = (w \,|\, x)$$

pour tout vecteur $x \in E$. On dit que w est le **produit vectoriel** *de u et v (pris dans cet ordre), et on note $w = u \wedge v$.*

♦ **Exercice 29.** 1) Démontrer ce théorème.
2) Montrer que pour tous $u, v \in E$, on a $v \wedge u = -u \wedge v$.
3) Montrer que pour tout $u \in E$, l'application $v \mapsto u \wedge v$ est linéaire, autrement dit que pour tous $v, v' \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \wedge (v + \lambda v') = u \wedge v + \lambda\, u \wedge v'$.

♦ **Exercice 30.** Soient $u, v \in E$, $w = u \wedge v$. Montrer les propriétés suivantes :
(i) On a $w = 0$ si, et seulement si, u et v sont colinéaires.
(ii) Le vecteur w est orthogonal à u et à v.
(iii) Si la famille (u, v) est libre, alors la famille (u, v, w) est une base directe de E.
(iv) Soient $\mathcal{E}$ une base orthonormée directe de E, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ les composantes de u dans cette base, et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ celles de v, i.e.,

$$\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}(v; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\mathrm{Mat}(w; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{pmatrix}$$

Remarque. D'après ce qui précède, si la famille (u, v) est orthonormée, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E. Cette remarque sera très importante dans la pratique : elle donne une méthode simple pour construire une base orthonormée directe de E dès lors qu'on a deux vecteurs unitaires orthogonaux.

♦ **Exercice 31.** Soient $u, v \in E$ de composantes $(3, 2, 2)$ et $(1, -2, 3)$. Déterminer les composantes de $u \wedge v$.

Exercice 18. Soient $u, v, w \in E$.
1) Vérifier que $u \wedge (v \wedge w) \in \mathrm{Vect}(v, w)$. En choisissant une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) telle que $v \in \mathrm{Vect}(e_1)$, $w \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, établir :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u|w)v - (u|v)w \ , \ (u \wedge v) \wedge w = (u|w)v - (v|w)u.$$

2) Prouver les formules suivantes :

$$(u \wedge v) \wedge (u \wedge w) = [u, v, w]u \ , \ [u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u] = [u, v, w]^2,$$
$$u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$$

Exercice 19. Soient $a, b, c, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Prouver sans calcul que

$$(a\lambda + b\mu + c\nu)^2 + (a\mu - b\lambda)^2 + (a\nu - c\lambda)^2 + (b\nu - c\mu)^2$$

est égal à :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

(ceci est appelé *l'indentité de Lagrange*).

2.2.2 Rotations en dimension 3

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

♦ **Exercice 32.** Soit $u \in SO(E)$.
1) Montrer que $1 \in \mathrm{Spec}(u)$.
2) Supposons $u \neq \mathrm{Id}_E$. Montrer que l'espace propre pour u associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

Supposons E orienté, et fixons une base orthonormée directe $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. Soit $u \in SO(E) \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$.

D'après l'exercice précédent, il existe un vecteur unitaire $f_1 \in E$, uniquement déterminé au signe près, tel que $u(f_1) = f_1$. Complétons pour obtenir une base orthonormée directe $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$. Par exemple, on prend f_2 unitaire orthogonal à f_1, et $f_3 = f_1 \wedge f_2$. Si $F = (\mathrm{Vect} f_1)^\perp = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$, alors F est stable par u (cf. exercice 8).

D'après l'étude des rotations en dimension 2, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, uniquement déterminé modulo 2π, et tel que

$$\Omega = \mathrm{Mat}(u; \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Définition 2.2.3. *Avec les notations précédentes, la droite* $\mathrm{Vect}(f_1)$ *orientée par le vecteur* f_1 *est appelée l'***axe** *de la rotation, et* θ *est l'***angle** *de cette rotation.*

Question. Si $u \in SO(E) \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$, comment déterminer en pratique l'axe et l'angle de la rotation u, c'est-à-dire f_1 et θ dans les notations précédentes ?

Réponse. Dans la pratique, u est donné par $A = \mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$. On détermine f_1 en écrivant $u(f_1) = f_1$. Autrement dit, il s'agit de rechercher la droite propre de u associée à la valeur propre 1 (cf. exercice 32). On prend alors pour f_1 n'importe quel générateur de cette droite de norme 1.

D'autre part :

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} \Omega = 1 + 2\cos\theta.$$

D'où la détermination de $\cos\theta$. Reste à déterminer $\sin\theta$. Un calcul facile montre que, pour $x \in E$:

$$(u - u^*)(x) = 2\sin\theta\,(f_1 \wedge x).$$

On voit aussi qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Mat}(u - u^*; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Enfin, si $f_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, et si $g \in \mathcal{L}(E)$ est défini par $g(x) = 2\sin\theta\,(f_1 \wedge x)$, on trouve

$$\operatorname{Mat}(g; \mathcal{E}) = 2\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

Compte tenu de (2.2.1) et (2.2.2), on détermine $\sin\theta$.

♦ **Exercice 33.** Vérifier ces assertions.

Exercice 20. * Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $u \in SO(E)$ une rotation de E. Montrer que u est le produit de deux réflexions, c'est-à-dire qu'il existe deux réflexions s_1 et s_2 telles que $u = s_1 \circ s_2$.

Exercice 21. Par des transformations orthogonales à préciser, diagonaliser les matrices symétriques réelles suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. Un espace euclidien de dimension 3 étant rapporté à une base orthonormée directe, montrer que les endomorphismes dont les matrices dans cette base sont

$$\frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

représentent des rotations. Déterminer angles et axes de ces rotations.

Exercice 23. Soit f un endomorphisme symétrique de E tel que : $\forall\, x \in E$, $(f(x)\,|\,x) = 0$. Déterminer f.

Exercice 24. Soient u un vecteur non nul de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$f : E \to E, \quad x \mapsto u \wedge x.$$

1) Vérifier que f est une application linéaire puis déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
2) Déterminer f^*.
3) Montrer que f^2 est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 25. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall\, u, v \in E, \quad f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v).$$

Montrer que f est ou bien l'endomorphisme nul, ou bien une rotation.

Exercice 26. Soient $a, b \in E$, avec $a \neq 0$.
1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $(a \,|\, b) = 0$;
   (ii) il existe $x \in E$ tel que $a \wedge x = b$.
2) On suppose que $(a \,|\, b) = 0$. Etablir :

$$\{x \in E \mid a \wedge x = b\} = \{\frac{b \wedge a}{\|a\|^2} + \lambda a \,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$